

Задания по математике в 2007 г.

Вариант № 1

1. Решить уравнение

$$(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x + 23} = 0.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{23}{4}, -1, 1, 6$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{2x + 12} \leq 1 - \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 16}}{x + 4}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty, -6) \cup [-2\sqrt{5}, -4) \cup \{-2\}$$

3. В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ .

Известно, что $MD = \frac{\sqrt{17}}{2}$ и синус угла DMQ равен $\frac{8}{17}$. Найти длины катетов треугольника DEF .

$$\text{Ответ: } 1 \text{ и } 4$$

4. Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $b_3, 6b_3, 27b_1$ образуют арифметическую прогрессию. Найти все возможные знаменатели геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .

$$\text{Ответ: } \sqrt{3}, 3$$

5. Прямая l_1 проходит через точки $(-3, 2)$ и $(1, 1)$ координатной плоскости (x, y) . Прямая l_2 проходит через точку $(-5, 4)$ и перпендикулярна прямой l_1 . Найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2 .

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{91}{17}, \frac{44}{17}\right)$$

6. Решить уравнение

$$\log_{\cos x}(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\sin^2 x + 5\sin 2x = 0$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{26}} + 2pn = \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}} + 2pn = \arctg 5 + 2pn, n \in \mathbf{Z}$$

7. За 2005 год число книг в фонде библиотеки поселка P увеличилось ровно на 0,4%, а за 2006 год ровно на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд поселка P за 2006 год?

$$\text{Ответ: } \text{на } 251$$

8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$$

имеет ровно один отрицательный корень.

$$\text{Ответ: } (-1, 0] \cup \left\{ \frac{2 + 2\sqrt{13}}{3} \right\}$$

Задания по математике в 2007 г.

Вариант № 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+7}(x^2-5|x|+6)=0.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{7}{3}, -2, 2, 3$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x^2+2x+1}{x+3} + \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} \leq 1.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty, -3) \cup [-\sqrt{5}, -2) \cup \{-1\}$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу опущены медиана AM и высота AH . Известно, что $AH = \frac{6}{\sqrt{13}}$ и косинус угла MAN равен $\frac{12}{13}$. Найти длины катетов треугольника ABC .

$$\text{Ответ: } 2 \text{ и } 3$$

4. Отрицательные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $45a_1, 7a_3, a_5$ образуют арифметическую прогрессию. Найти все возможные знаменатели геометрической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

$$\text{Ответ: } \sqrt{5}, 3$$

5. Прямая l_1 проходит через точки $(4, 5)$ и $(7, 6)$ координатной плоскости (x, y) . Прямая l_2 проходит через точку $(3, -5)$ и перпендикулярна прямой l_1 . Найти все точки пересечения прямых l_1 и l_2 .

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{10}, \frac{111}{30} \right)$$

6. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + 3\sin 2x = \log_{\cos x} (\cos^2 x + \sin^2 x).$$

$$\text{Ответ: } -\arccos \frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi n = -\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi n = -\arctg 3 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$$

7. За 2005 год численность населения города N сократилась ровно на 1,2%, а за 2006 год — ровно на 2,4%. Известно, что численность населения города N никогда не превышала 50 тысяч человек. На сколько человек сократилась численность населения города N за 2006 год?

$$\text{Ответ: на } 741$$

8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a-1)x^2 + (a+3)x + a = 0$$

имеет ровно один отрицательный корень.

$$\text{Ответ: } (0, 1] \cup \left\{ \frac{5+2\sqrt{13}}{3} \right\}$$

Задания по математике в 2007 г.

Вариант № 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+9}(x^2-8|x|+15)=0.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{9}{2}, -3, 3, 5$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5} + \frac{x^2+4x+4}{2x+16} \leq 1.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty, -8) \cup [-2\sqrt{7}, -5) \cup \{-2\}$$

3. В прямоугольном треугольнике PQR на гипотенузу опущены медиана PA и высота PH .

Известно, что $PA = \frac{\sqrt{34}}{2}$ и синус угла PAH равен $\frac{15}{17}$. Найти длины катетов треугольника PQR .

$$\text{Ответ: } 3 \text{ и } 5$$

4. Отрицательные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $8b_1, 3b_3, b_5$ образуют арифметическую прогрессию. Найти все возможные знаменатели геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .

$$\text{Ответ: } \sqrt{2}, 2$$

5. Прямая l_1 проходит через точки $(1, 2)$ и $(5, 3)$ координатной плоскости (x, y) . Прямая l_2 проходит через точки $(4, -2)$ и перпендикулярна прямой l_1 . Найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2 .

$$\text{Ответ: } \left(\frac{49}{17}, \frac{42}{17} \right)$$

6. Решить уравнение

$$\log_{\sin x}(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 5 \sin 2x.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} + 2\pi n = \arcsin \frac{1}{\sqrt{26}} + 2\pi n = \arctg \frac{1}{5} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$$

7. За 2005 год число книг в фонде центральной библиотеки города G увеличилось ровно на 0,6%, а за 2006 год из-за недисциплинированности читателей уменьшилось ровно на 0,8%. Известно, что число книг в фонде центральной библиотеки города G никогда не превышало 100 тысяч. На сколько книг уменьшился фонд центральной библиотеки города G за 2006 год?

$$\text{Ответ: } \text{на } 503$$

8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + (a+4)x + a+1 = 0$$

имеет ровно один положительный корень.

$$\text{Ответ: } [-1, 0) \cup \left\{ \frac{2-2\sqrt{13}}{3} \right\}$$

Задания по математике в 2007 г.

Вариант № 4

1. Решить уравнение

$$(x^2 - 6|x| + 8)\sqrt{5x + 16} = 0.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{16}{5}, -2, 2, 4$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{x + 3} \leq 1 - \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 6}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty, -6) \cup [-\sqrt{11}, -3) \cup \{-1\}$$

3. В прямоугольном треугольнике KLM на гипотенузу опущены медиана KA и высота KB . Известно, что $ML = 2\sqrt{5}$ и косинус угла AKB равен $\frac{4}{5}$. Найти длины катетов треугольника KLM .

$$\text{Ответ: } 2 \text{ и } 4$$

4. Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $b_5, 5b_3, 24b_1$ образуют арифметическую прогрессию. Найти все возможные знаменатели геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .

$$\text{Ответ: } 2, \sqrt{6}$$

5. Прямая l_1 проходит через точки $(5, 1)$ и $(-1, 3)$ координатной плоскости (x, y) . Прямая l_2 проходит через точку $(7, -4)$ и перпендикулярна прямой l_1 . Найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2 .

$$\text{Ответ: } \left(\frac{83}{10}, -\frac{1}{10}\right)$$

6. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + 3\sin 2x - \log_{\sin x}(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0.$$

$$\text{Ответ: } p - \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} + 2pn = p - \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} + 2pn = p - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2pn, n \in \mathbf{Z}$$

7. За 2005 год численность населения города N , не превышавшая 40 тысяч человек, сократилась ровно на 0,5%, а за 2006 год увеличилась ровно на 0,8%. На сколько человек увеличилась численность населения города N за 2006 год?

$$\text{Ответ: } \text{на } 199$$

8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a-1)x^2 + (a+3)x + a = 0.$$

имеет ровно один положительный корень.

$$\text{Ответ: } [0, 1) \cup \left\{ \frac{5 - 2\sqrt{13}}{3} \right\}$$