Варианты письменных работ по математике, предлагавшиеся на вступительном экзамене на факультет психологии МГУ в 1994 г.

Вариант I.

1. Верно ли неравенство

$$3log_2 5 < \sqrt{9log_2 5 + 28}$$

(таблицами и калькулятором не пользоваться)?

2. Известно, что $x = 1, y = -1$ одно из решений системы
$\begin{cases} 2ax + by = \sqrt{3}tg(\frac{1111\pi}{6}) \\ ax^2 + by^2 = 2 \end{cases}.$
Найти все решения данной системы.

3. В тупоугольном треугольнике *ABC* на стороне *AB* длины 14 выбрана точка *L*, равноудалённая от прямых *AC* и *BC*, а на отрезке *AL*, точка *K* равноудалённая от вершин *A* и *B*. Найти синус угла *ACB*, если *KL*=1; а угол *CAB*=45º.

4. Длины боковых рёбер *SA* и *SB* четырёхугольной пирамиды *SABCD* относятся как $\sqrt{7} : \sqrt{11}$. Через точки *A*, *B*, *D*, проведена сфера пересекающая боковые рёбра *SA*, *SB*, *SD* в точках A_1, B_1, D_1, соответственно, причём $AA_1 : A_1S = 1 : 3$. Через точки *B*, *C*, *D*, D_1 проведена ещё одна сфера, пересекающая боковое ребро *SB* в точке *E*. Найти отношение отрезков *SE* и B_1B.

5. Абитуриенты сдавали экзамены в течение 3-х дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся в каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равным числу аудиторий. Если бы экзамены проводились бы в другом корпусе, то их можно было бы провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причём в каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найти минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменовано при этих условиях.

Вариант II.

1. Верно ли неравенство

$$4(1 - log_3 2) < \sqrt{1 + log_3 4}$$

(таблицами и калькулятором не пользоваться)?

2. Известно, что одним из решений системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by + \sin\left(\frac{333\pi}{2}\right) = 0 \\ a(x^2 + xy + y^2) = b \end{cases}$$

Является $x = 2, y = -1$. Найти все решения данной системы.

3. Из вершины *L* ромба *KLMN* проведена прямая, пересекающая прямую *KN* в точке *P*. Диагональ *KM* делит в точке *Q* отрезок *LP* так, что *LQ* : *QP* = 9 : 10. Найти синус угла *LKN*, если треугольник *KLP* тупоугольный, угол *PLM* = 60º.

4. Через вершины B и C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена сфера, пересекающая ребро CC_1 и диагональ DC_1 в точках K и L соответственно, причём $KC_1 = \frac{1}{4}CC_1$. Через точки B, L и середину ребра AB проведена вторая сфера, пересекающая диагональ AC_1 параллелепипеда в точках M и N. Определить какую часть длины AC_1 составляет отрезок MN, если AB=AA_1 и $AB = \sqrt{\frac{2}{3}AC_1}$.

5. Собранные на бахче арбузы уложили в одинаковые контейнеры, положив в каждый контейнер одинаковое число арбузов. Когда третью часть всех контейнеров погрузили в автомобили, то число погруженных контейнеров оказалось равно числу арбузов в одном контейнере. Пятая часть всех собранных арбузов была продана магазином в течение нескольких дней, причём каждый день продавалось одно и то же число арбузов, равное квадрату числа дней продажи. Какое минимальное количество арбузов могло быть собрано?

Ответы

Вариант I.

1. Верно.
2. $(1,-1), (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$.
3. $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$.
4. $\frac{21}{23}$.
5. 432.

Вариант II.

1. Верно.
2. $(2,-1), (-\frac{13}{7}, \frac{2}{7})$.
3. $5\frac{\sqrt{3}}{18} - 3\frac{\sqrt{2}}{18}$.
4. $\frac{1}{6}$.
5. 16875.